

LE PROBLÈME DES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES VARIABLES POUR UN ÉCOULEMENT MONOPHASIQUE DANS UN CANAL CHAUFFANT PRISMATIQUE VERTICAL

PH. VERNIER

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble. Service des Transferts Thermiques Grenoble, France

(reçu le 8 octobre 1969)

Résumé—On effectue l'analyse dimensionnelle à partir des équations de conservation les plus générales écrites dans l'approximation de la couche limite. Les conditions aux limites comportant un flux de chaleur donné à la paroi, on montre que de même que le coefficient de dilution β du fluide conduit au nombre de Grashof qui régit les effets de convection naturelle, de même le coefficient de température γ de la viscosité conduit à un nombre sans dimension N qui régit les effets de viscosité variable. On définit ce qu'on entend par écoulement pseudo-établi et on donne des résultats numériques pour les types courants d'écoulements laminaires. L'analyse dimensionnelle s'applique sans modification à l'étude expérimentale des écoulements turbulents.

NOTATIONS

$A, B,$	constantes d'intégration;	$K_1, K_2, K_3,$	constantes;
$B,$	nombre sans dimension, $\beta\varphi b/k$;	$k,$	conductivité thermique du fluide [$\text{W}/\text{cm}^\circ\text{C}$];
$b,$	demi distance entre plaques chauffantes;	$N,$	nombre de Yang, $\gamma\mu\varphi b/k$;
$C,$	nombre sans dimension, $\delta/\beta\varphi b/k$;	$Nu,$	nombre de Nusselt, $h b/k$;
$c,$	chaleur spécifique du fluide (à pression constante) [$\text{J}/\text{g}^\circ\text{C}$];	$p,$	pression statique;
$D,$	diamètre hydraulique;	$P,$	pression adimensionnelle, $(p + \rho_0gz)/\rho_0w_m^2$;
$Ec,$	nombre d'Eckert, $w_m^2k/c\varphi b$;	$Pr,$	nombre de Prandtl, $c\mu/k$;
$f, F,$	fonctions;	$q^*,$	paramètre de Wolf-Leppert, $\varphi/\rho w_m H_0$;
$Fr,$	nombre de Froude, $w_m^2k/g\beta\varphi b^2$;	$Re,$	nombre de Reynolds, $\rho w_m b/\mu$;
$F, G,$	composantes suivant Y, Z des quantités de mouvement adimensionnelles;	$t,$	température [$^\circ\text{C}$];
$G,$	abréviation pour le rapport, Gr/Re ;	$t^*,$	différence, $t - t_m$;
$g,$	accélération de la pesanteur;	$T,$	température adimensionnelle, $(t - t_0)/(\varphi b/k)$;
$Gr,$	nombre de Grashof, $\rho^2g\beta\varphi b^4/k\mu^2$;	$T^*,$	différence, $T - T_m$;
$H,$	enthalpie [J/g];	$U,$	vitesse de la paroi dans l'écoulement de Couette;
$h,$	coefficient d'échange thermique [$\text{W}/\text{cm}^2^\circ\text{C}$];	$v, w,$	composantes de la vitesse en un point (y, z) ;
		$V, W,$	composantes adimensionnelles de la vitesse en (Y, Z) ;

V^* ,	autre expression adimensionnelle $Re Pr V$;
$y, z,$	coordonnées;
$Y, Z,$	coordonnées adimensionnelles;
Z^* ,	cote adimensionnelle $Z/Re Pr$;
$\beta,$	coefficient de dilatation du fluide dans (4);
$\gamma,$	coefficient de température de la viscosité dans (5);
$\delta,$	coefficient de température de la masse spécifique dans (4);
$\epsilon,$	coefficient de température de la viscosité dans (31);
$\lambda,$	paramètre de forme du profil des vitesses, $\lambda^4 = \frac{1}{4}Gr/Re$;
$A,$	coefficient de perte de pression unitaire par frottement $= 2b/\rho w_m^2 dp_f/dz $;
$\mu,$	viscosité dynamique du fluide;
$\rho,$	masse spécifique du fluide;
$\tau,$	tension tangentielle;
$\varphi,$	densité de flux de chaleur à la paroi [W/cm^2].

Indices

$f,$	frottement;
$H,$	avec transfert de chaleur;
iso,	isotherme ou sans transfert de chaleur;
$m,$	moyenne sur $y \in (0, b)$;
$p,$	à la paroi pour $y = b$;
0,	à l'entrée du canal pour $z = 0$.

INTRODUCTION

LA DÉTERMINATION, expérimentale ou théorique, des coefficients d'échange thermique et de frottement dans un tuyau dont les parois sont chauffées pose des problèmes délicats lorsque les propriétés physiques du fluide sont variables. Certains résultats expérimentaux qui à première vue, paraissent dispersés, ou en contradiction avec les formules admises, doivent être mieux expliqués si on introduit l'influence de la variation des propriétés physiques à la traversée de la couche limite.

On examine dans cette note le couplage qui

existe entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de l'énergie. On adopte comme point de départ l'approximation des équations de la couche limite à deux dimensions et on fait une analyse dimensionnelle aussi complète que possible. Le but recherché est de définir les paramètres adimensionnels lorsque l'on se fixe le flux de chaleur à la paroi, de poser le problème à résoudre tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental, de le résoudre dans certains cas d'écoulement laminaire.

1. EQUATIONS GENERALES

1.1 Bibliographie sommaire et hypothèses

Le problème doit être abordé en s'attachant à l'aspect du développement simultané des profils des vitesses et des températures à partir de l'entrée du canal chauffant. En effet on ne peut pas admettre a priori que l'écoulement puisse s'établir tant que les propriétés physiques continuent à varier.

De plus, comme le dit Deissler [1], la difficulté essentielle dans le transfert de chaleur avec propriétés variables est que chaque fluide doit être traité séparément puisque leurs variations sont différentes. Nous examinerons dans cette note le cas de l'eau et des métaux liquides. Nous simplifierons même l'analyse en ne considérant que les variations de la masse spécifique ρ et de la viscosité μ en fonction de la température t , car les variations faibles de la chaleur spécifique c et de la conductibilité thermique k n'ont sur les phénomènes que des influences du second ordre, du moins tant que l'état considéré reste éloigné de l'état critique.

L'eau étant incompressible et peu visqueuse, il n'est pas indispensable de faire figurer dans l'équation de l'énergie les termes d'énergie de compression et d'énergie dissipée en chaleur par le frottement visqueux.

Le but principal de l'étude est de faire apparaître le lien qui existe entre le flux de chaleur (condition imposée à la paroi) et la variation de la viscosité, et ceci en utilisant les méthodes éprouvées de la littérature :

lien entre le flux et la variation de masse spécifique mis en évidence pour la convection naturelle par Sparrow et Greeg [2], utilisé depuis par Vernier [3] :

introduction du flux comme condition aux limites dans le problème de Graetz–Nusselt par Sellars *et al.* [4] et Cess [5].

Les paramètres introduisant le flux que l'on trouve dans la littérature sont ceux de Deissler [1], McEligot et Leppert [6] et Yang [7].

Le paramètre de Deissler :

$$\beta_D = \frac{\varphi}{ct_p \sqrt{(\tau_p \rho_p)}}$$

contient à la fois le flux (donnée), et la température et la tension tangentielle aux parois (inconnues). Comme le fait remarquer Leppert [6], ce paramètre n'est pas un paramètre libre puisqu'il contient des inconnues. Il s'ensuit que des résultats exprimés à l'aide de β_D nécessitent une procédure d'itération lorsqu'un ingénieur de projet veut les utiliser. Le paramètre β_D ne représente pas correctement les résultats de ce dernier auteur [6].

Le paramètre de Wolf–Leppert [6]

$$q^* = \frac{\varphi}{\rho w_m H_0}$$

ne contient effectivement que des grandeurs données et aurait, dit l'auteur, l'avantage de rester constant tout le long du canal chauffant. Les corrélations de Leppert sont donc de la forme :

$$Nu = K_1 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \cdot \exp(-K_2 q^*)$$

$$A_H = A_{iso} \cdot \exp(-K_3 q^*)$$

On peut se demander comment le fait de se fixer l'enthalpie d'entrée H_0 peut rendre compte de la variation des propriétés physiques en fonction de la température quel que soit l'abscisse dans la zone d'écoulement établi.

Tous les essais récents faits avec un flux imposé ont été analysés par Costa [8] : d'une manière générale, on trouve que les paramètres utilisés pour représenter les variations des propriétés physiques sont :

$$\Delta t = t_p - t_m, \quad \frac{\mu_m}{\mu_p}, \frac{Pr_m}{Pr_p}, \frac{T_m}{T_p}$$

Comme à l'époque où les essais étaient faits avec une température de paroi constante donnée, on a continué à utiliser les valeurs mesurées de ces températures (inconnues en théorie) pour établir les corrélations.

Le paramètre de Kwang-Tzu Yang [7] :

$$\lambda = \frac{\gamma \varphi D}{k}$$

est, à notre connaissance, le premier nombre sans dimension qui permet de relier le flux et la variation de la viscosité avec la température dans le cas d'un liquide. C'est cette procédure que nous admettons en développant l'analyse dimensionnelle qui va suivre. Les calculs de K. T. Yang [7] utilisent une méthode intégrale du type von Kármán–Pohlhausen et concernent le développement de la couche limite thermique (problème de Graetz) en écoulement laminaire. On observe très bien la diminution du frottement et l'augmentation du nombre de Nusselt pour des valeurs positives de λ croissant. A propos de ce paramètre λ , on peut aussi consulter [24, 25].

L'article le plus récent est celui de Poots et Rogers [9] : les connaissances concernant les liquides sont actuellement peu satisfaisantes. Cet article est le premier d'une série concernant uniquement le cas de l'eau. Il s'agit ici d'écoulements de Poiseuille–Couette avec températures de paroi imposées : si l'on revient à ces conditions aux limites, c'est que, comme les auteurs le font très justement remarquer, seules de telles conditions admettent un écoulement établi et que par conséquent, les effets recherchés de variation des propriétés ne sont pas masqués par les phénomènes d'établissement. Par contre, ces auteurs n'ont pas recherché si un seul paramètre sans dimension comme celui de Yang [7] pouvait être une bonne approximation suffisante dans le cas de l'eau et des métaux liquides.

1.2 Equations et conditions aux limites

Les équations de conservation, écrites dans l'approximation de la couche limite, sont (Schlichting [10], p. 301):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} &= 0 & (1) \\ \rho \left(v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{dp}{dz} - \rho g + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) & (2) \\ \rho c \left(v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) &= k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & (3) \end{aligned} \right.$$

Ces équations, bidimensionnelles, s'appliquent au canal vertical défini par deux plaques planes parallèles de largeur infinie, distantes de $2b$, de hauteur quelconque.

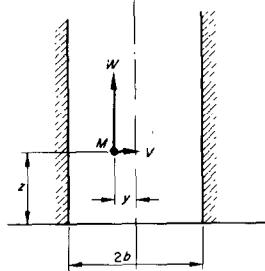


FIG. 1.

Les équations caractérisant l'état physique de l'eau seront écrites sous la forme suivante:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(t - t_0) - \delta(t - t_0)^2] \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \gamma(t - t_0) \quad (5)$$

qui permettent de représenter d'une manière assez satisfaisante la masse spécifique et la viscosité dynamique de l'eau. Nous précisons plus loin l'incidence théorique de lois telles que (4) et (5).

Jusqu'à présent, l'inventaire des inconnues est le suivant:

$$v, w, \frac{dp}{dz}, t, \rho, \mu. \text{ (6 inconnues).}$$

Nous n'avons que 5 équations. La 6ème sera la forme intégrée de l'équation de continuité en introduisant la vitesse massique moyenne $\rho_0 w_m$ qui sera une des données du problème:

$$\int_0^b \rho w dy = b \rho_0 w_m. \quad (6)$$

Les conditions aux limites du problème pourront être les suivantes:

$$\begin{aligned} z = 0 \quad t = t_0 \quad v = 0 \quad w &= w_m f\left(\frac{y}{b}\right) \\ z > 0 \quad \left\{ \begin{aligned} y = 0 \quad v = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ y = b \quad v = w = 0 \quad k \frac{\partial t}{\partial y} &= \varphi. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

1.3. Analyse dimensionnelle

1.3.1 Cas général. Les variables adimensionnelles introduites seront:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\rho v}{\rho_0 w_m} \quad G = \frac{\rho w}{\rho_0 w_m} \quad P = \frac{p + \rho_0 g z}{\rho_0 w_m^2} \\ T &= \frac{t - t_0}{\varphi b / k} \quad Y = y/b \quad Z = z/b. \end{aligned}$$

Ce qui permet, compte tenu de (4) et (5) d'écrire les équations (1)-(3) et (6) sous la forme suivante, où l'on a négligé les variations de ρ qui s'introduisent dans les termes de frottement par l'usage de la fonction G:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial G}{\partial Z} &= 0 & (7) \\ F \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{G}{1 - BT(1 + CT)} \right) \\ + G \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{G}{1 - BT(1 + CT)} \right) \\ = - \frac{dP}{dZ} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{1 + NT} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) \\ + \frac{1}{Fr} T(1 + CT) & \quad (8) \end{aligned}$$

$$F \frac{\partial T}{\partial Y} + G \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{Ec}{Re} \frac{1}{1 + NT} \left(\frac{\partial G}{\partial Y} \right)^2 \quad (9)$$

$$\int_0^1 G \, dY = 1. \quad (10)$$

Tandis que les conditions aux limites sont :

$$\left. \begin{array}{l} Z = 0 \quad T = 0 \quad F = 0 \quad G = f(Y) \\ Z > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \quad F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \\ Y = 1 \quad F = G = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 1 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Les paramètres sans dimensions, qui déterminent le problème posé apparaissent dans les équations (7)–(9) :

Nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_0 w_m b}{\mu_0}$

Nombre de Froude $Fr \quad Fr^{-1} = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{gb}{w_m^2} \cdot \frac{\beta \varphi b}{k}$

Nombre de Prandtl $Pr = \frac{c \mu_0}{k}$

Nombre d'Eckert $Ec = \frac{w_m^2}{c} \frac{\varphi b}{k}$

Nombre de Yang [7] $N = \frac{\gamma \mu_0 \varphi b}{k}$

Nombres caractérisant la variation de la masse spécifique :

$$B = \frac{\beta \varphi b}{k}$$

$$-C = \frac{\delta \varphi b}{\beta k}$$

Le problème posé dépend donc des 7 paramètres ci-dessus. La vitesse, la température en un point, dépendent évidemment en plus de ce point (Y, Z). La pression, le nombre de Nusselt, le nombre de frottement, dépendent en plus seulement de la cote Z. Ces deux quantités sont définies par

$$Nu^{-1} = T(1, Z) - \int_0^1 GT \, dY \quad (12)$$

$$\Delta Re = \frac{2}{1 + NT(1, Z)} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Y} \right)_{Y=1} \right]. \quad (13)$$

Nous allons maintenant examiner le moyen de réduire le nombre de paramètres déterminant le problème, tout en restant dans un cas très général. Nous ferons simplement l'hypothèse que les variations de masse spécifique n'interviennent que dans les forces de densité (B = 0) et sous forme linéaire (C = 0).

1.32. Réduction du nombre de paramètres. Dans ces conditions, en posant :

$$V = \frac{v}{w_m}, \quad W = \frac{w}{w_m}$$

les équations (7)–(10) prennent une forme analogue à celle que l'on rencontre dans tous les cours et notamment dans [10] p. 300 :

$$\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (14)$$

$$V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = - \frac{dP}{dZ} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{1 + NT} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Fr} T \quad (15)$$

$$V \frac{\partial T}{\partial Y} + W \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{Ec}{Re} \frac{1}{1 + NT} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \quad (16)$$

$$\int_0^1 W \, dY = 1. \quad (17)$$

Le problème assez général posé dépend de 5 paramètres, plus le point (Y, Z) considéré; pour le nombre de Nusselt, on a donc :

$$Nu = F(Re, Pr, Fr, N, Ec, Z). \tag{18}$$

Nous allons maintenant utiliser un changement de variables qui va permettre de réduire le nombre de paramètres de une unité. Parmi tous les changements possibles que l'on rencontre dans la littérature, Bodoia [11] et [12], Sparrow-Acrivos [13, 14], c'est encore la transformation de Graetz Nusselt employée par Worsøe-Schmidt et Leppert [15] qui nous semble la plus pratique. Il suffit de poser :

$$V^* = Re Pr V \quad \text{et} \quad Z^* = \frac{Z}{Re Pr}$$

et les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial V^*}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z^*} = 0 \tag{19}$$

$$V^* \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z^*} = - \frac{dP}{dZ^*} + Pr \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{1 + NT} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) + \frac{Re Pr}{Fr} T \tag{20}$$

$$V^* \frac{\partial T}{\partial Y} + W \frac{\partial T}{\partial Z^*} = \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + Ec Pr \frac{1}{1 + NT} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \tag{21}$$

$$\int_0^1 W dY = 1. \tag{22}$$

Avec les conditions aux limites identiques à celles écrites plus haut :

$$\left. \begin{array}{l} Z^* = 0 \quad T = 0 \quad V^* = 0 \\ Z^* > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \quad V = 0 \\ Y = 1 \quad V = W = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = f(Y) \\ \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial Y} = 1 \end{array} \tag{23}$$

Ainsi, au lieu de (18), on aura pour le Nusselt :

$$Nu = F \left(Pr, \frac{Re}{Fr}, N, Ec, Z^* \right) \tag{24}$$

c'est-à-dire un paramètre de moins. Par contre la transformation de Sparrow-Acrivos [13, 14] ne modifie pas la forme (18) à 5 paramètres. Remarquons que le paramètre Re/Fr s'écrit :

$$\frac{Re}{Fr} = \frac{Gr}{Re}$$

Le paramètre Gr/Re régit la convection mixte (naturelle et forcée) en canal. On le trouve pour la première fois semble-t-il chez Hanratty [16, 17]. Il est utilisé par Vernier [3] et par Metais [18]. Rappelons que, le long de la plaque verticale, c'est le paramètre Gr/Re^2 , construit avec la cote z courante, qui régit la convection mixte.

Cas de la convection forcée élémentaire :

$$Gr = 0 \quad N = 0 \quad Ec = 0.$$

Le nombre Re disparaît du problème mathématique à résoudre :

$$Nu = F(Pr, Z^*).$$

Le phénomène est le même pour un Z^* donné :

$$Z^* = \frac{Z_1}{Re_1 Pr} = \frac{Z_2}{Re_2 Pr} = \text{Cte.}$$

Plus le Reynolds est grand, plus l'établissement est long. On sait d'autre part que $Nu_\infty = \text{Cte}$, indépendant de Pr et Re .

1.33. Possibilité de solution asymptotique. Nous examinons maintenant l'approximation courante valable pour les fluides peu visqueux, c'est-à-dire que le nombre d'Eckert Ec est nul : $Ec = 0$.

Le système (19)-(22) n'a pas de solution asymptotique telle que :

$$V = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial Z^*} = 0 \quad \frac{d^2 P}{dZ^{*2}} = 0$$

comme dans le cas $N = 0$ traité dans [19] avec les variables de Bodoia [12].

La non existence d'une solution asymptotique n'empêche pas nécessairement celle d'une solution quasi-asymptotique qui représentera une solution approchée acceptable du problème.

Au lieu de la température d'entrée du canal $t = t_0$ pour $z = 0$, qui nous a permis de définir les nombres Pr , Re , Fr , N , nous choisirons comme température de référence à la cote z la température moyenne de mélange t_m . On cherche une solution pour la température et la vitesse de la forme :

$$t = t_m(z) + t^*(y)$$

$$w = w(y).$$

On définira ainsi la quantité adimensionnelle :

$$T^*(Y) = \frac{t - t_m}{\varphi b/k} = T - T_m(Z).$$

Les paramètres adimensionnels seront maintenant : Re_m , Fr_m , Pr_m , N_m définis avec les propriétés physiques prises à la température t_m .

L'équation de l'énergie (16), intégrée de $Y = 0$ à $Y = 1$, permet de calculer la température $T_m(Z)$:

$$\frac{d}{dZ} \int_0^1 WT dY = \frac{1}{Re_m \cdot Pr_m}$$

c'est-à-dire, puisque $\int_0^1 W dY = 1$

$$\frac{dT_m}{dZ} = \frac{1}{Re_m \cdot Pr_m} \tag{25}$$

Ainsi, on pourra remplacer les équations (14)-(17) par le système :

$$\frac{dP_m}{dZ} = \frac{1}{Re_m} \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{1 + N_m T^*} \cdot \frac{dW}{dY} \right) + \frac{T^*}{Fr_m} \tag{26}$$

$$W = \frac{d^2 T^*}{dY^2} \tag{27}$$

$$\int_0^1 WT^* dY = 0 \tag{28}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} Y = 0 & \frac{dW}{dy} = \frac{dT^*}{dy} = 0 \\ Y = 1 & W = 0, \quad \frac{dT^*}{dY} = 1. \end{cases}$$

Le système intégral-différentiel ordinaire ci-dessus est non linéaire et on ne peut affirmer qu'il existe une seule solution. Pour des raisons physiques, on admet que la solution existe. Les fonctions W et T^* ne sont fonctions explicitement que de Y . La dépendance par rapport à Z ne se fait que par l'intermédiaire des propriétés physiques prises à la température t_m .

Les définitions (12) et (13) deviennent :

$$Nu^{-1} = T^*(1) \tag{29}$$

$$A_m Re_m = \frac{2}{1 + N_m T^*(1)} \left| \left(\frac{dW}{dY} \right)_{y=1} \right| \tag{30}$$

Comme pour l'écoulement développé en convection naturelle [3], pour lequel on avait :

$$Nu = \text{fonction de } \frac{Re}{Fr}, \left(\frac{Re}{Fr} = \frac{Gr}{Re} \right)$$

on aura ici pour l'écoulement développé en convection forcée :

$$Nu_m = \text{fonction de } N_m.$$

D'une façon générale, en convection mixte :

$$Nu_m = F \left(N_m, \frac{Re_m}{Fr_m} \right).$$

Une fois de plus, on constate que le nombre de Prandtl n'intervient pas dans la détermination de la convection laminaire établie dans un canal de section constante chauffé uniformément à flux constant.

1.4 Non linéarité des propriétés physiques

Nous terminons ce chapitre en montrant comment la non linéarité des propriétés physiques en fonction de la température complique

le problème. Au paragraphe 1.3, la relation linéaire (5):

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \gamma(t - t_0) \tag{5}$$

si elle est vraie, entraîne $\gamma = \text{Cte}$ quelle que soit la température de référence:

λ	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Nu	8,235	8,245	8,388	8,988	10,454	12,906	15,859	18,723	21,397

2. RESULTATS ET APPLICATIONS

2.1 Convection mixte

2.1.1 Ecoulement établi (cas linéaire $N = 0$).

On donne les valeurs numériques de la fonction $Nu = F(\lambda)$ calculées à l'aide des fonctions $\Theta^*(\lambda)$ et $F_1(\lambda)$ données dans [3]. Voir à ce sujet l'Annexe

température d'entrée $t_0 \rightarrow \mu_0 = \mu(t_0)$
température moyenne $t_m \rightarrow \mu_m = \mu(t_m)$.

Par contre, une relation du 2ème degré:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + \gamma(t - t_0) + \epsilon(t - t_0)^2 \tag{31}$$

entraîne des valeurs de γ fonction de t_0 .

En effet si on a:

$$\frac{1}{\mu} = a + bt + ct^2 \tag{32}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = c \\ \gamma = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu} \right) \right]_{t=t_0} = b + 2ct_0 \\ \frac{1}{\mu_0} = a + bt_0 + ct_0^2. \end{array} \right.$$

Par suite la relation (31) s'écrit sous forme adimensionnelle:

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + N_1 T + N_2 T^2 \text{ au lieu de } 1 + NT$$

avec

$$N_1 = \frac{\gamma \mu_0 \phi b}{k} \quad N_2 = \epsilon \mu_0 \left(\frac{\phi b}{k} \right)^2$$

soit 2 paramètres N_1 et N_2 au lieu d'un seul N .

A la Fig. 2, on a tracé la courbe $Nu = F(\lambda)$. La droite $\frac{1}{3} \lambda$ représente l'asymptote pour $\lambda \rightarrow \infty$. On a indiqué aussi les points expérimentaux [3]. Ces résultats sont donnés avec les définitions suivantes:

$$Nu = \frac{4hb}{k} = \frac{4}{T^*(1)} \text{ et } \lambda^4 = \frac{\rho_0 g \beta \phi b^3}{4 \mu k w_m} = \frac{1}{4} \frac{Gr}{Re}$$

2.1.2 Développement de l'écoulement. On a étendu la méthode numérique des différences finies de [19] avec $N \neq 0$. On a traité les cas (Fig. 3 et Fig. 4):

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0. \quad Gr/Re = 875 \quad Pr = 6,82 \\ N = 6,03 \quad Gr/Re = 535 \quad Pr = 6,82. \end{array} \right.$$

Figure 3, on voit que le Nusselt trouvé dépasse d'environ 4,5 pour cent le Nusselt obtenu pour $N = 0$, ceci dans la région d'écoulement développé. Il semble que le Nusselt passe par un minimum avant d'atteindre une valeur asymptotique. Figure 4, on note l'influence du paramètre N sur les profils des vitesses $W(Y)$.

Pour $N = 0$, on a pris $G = 875$ afin de tenir compte des propriétés physiques moyennes du fluide sur le champ de l'écoulement. Le profil asymptotique doit présenter des vitesses négatives sur l'axe du canal dès que $G > 4\pi^4$ ($= 389,63$). On ne peut approcher ce profil car le calcul aux différences devient instable [12] dès que $W < 0$.

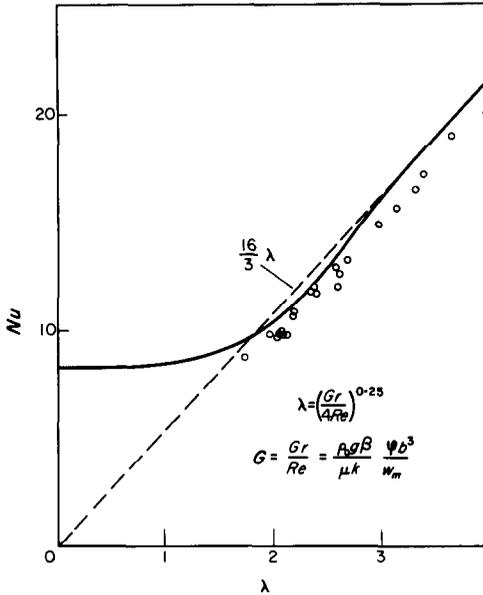


FIG. 2. Nombre de Nusselt.

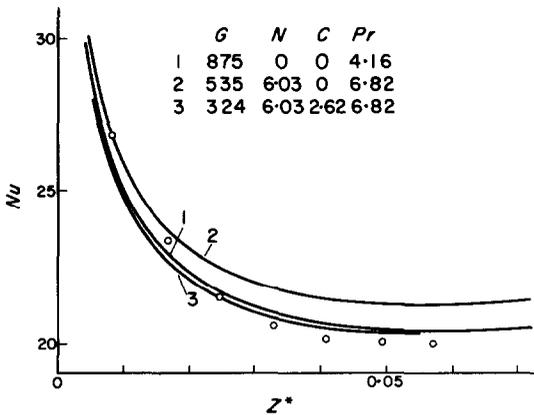


FIG. 3. Nombre de Nusselt.

Pour $N = 6,03$: la valeur de $G = 535$ est plus petite puisque c'est le viscosité μ_0 à l'entrée du canal qui sert au calcul.

La vitesse dans l'axe devient négative pour une cot Z^* dépassant de 7 pour cent celle du cas où $N = 0$. Le maximum de vitesse est plus proche de la paroi.

Indiquons que les méthodes numériques qui utilisent la technique des différences finies ont subi ces dernières années une mise au point très

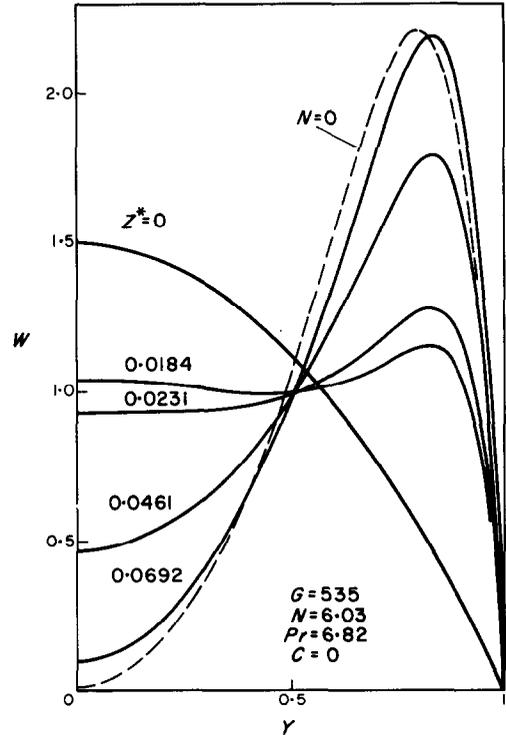


FIG. 4. Profils des vitesses.

poussée qui permet de les créditer d'une grande confiance. Les pionniers de ces méthodes sont: Bodoia et Osterle [11, 12] pour l'écoulement en canal et S. W. Churchill [20] pour l'écoulement en milieu semi infini, les deux avec l'approximation de la couche limite ($\partial p / \partial y = 0$).

Récemment, des calculs en canal ont été faits avec ces méthodes par Hornbeck [21], Hwang [22], Worsøe-Schmidt et Leppert [15]. Ce dernier traite le cas des gaz. Le cas de l'eau a été traité par Chato [31].

Une justification de l'emploi de cette technique des différences réside dans l'avis unanime de beaucoup d'auteurs pour dire que des méthodes approchées, telle que la méthode intégrale de la couche limite (von Kármán-Pohlhausen), donnent une mauvaise précision dans les cas qui nous intéressent.

On commence à rencontrer des études d'écoulement bidimensionnel où l'on abandonne l'hypothèse de la couche limite afin de

chercher l'influence du gradient de pression transversal $\partial p/\partial y$. Cette généralisation entraîne le traitement des équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes [23] [32].

2.2 Convection forcée en régime établi ($Gr/Re = 0$)

2.2.1 Ecoulements de Poiseuille et de Couette avec températures de paroi imposées. Nous traitons à titre d'exemple deux cas simples d'écoulements réellement établis. Poots [9] a résolu ces problèmes de façon purement numérique sans faire apparaître l'influence première du nombre N .

(a) Ecoulement de Couette

$$\begin{cases} y = 0 & w = 0 & t = t_0 \\ y = b & w = U & t = t_1. \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} Y = \frac{y}{b} & Re = \frac{\rho Ub}{\mu_0} \\ Z = \frac{z}{b} & N = \gamma\mu_0(t_1 - t_0) \end{cases}$$

$$P = (p + \rho gz)/\rho U^2 \quad W = \frac{w}{U} \quad T = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

Les équations (2) et (3) s'écrivent :

$$\begin{cases} Re \frac{dP}{dZ} = \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{1 + NT} \frac{dW}{dY} \right) & Y = 0 & W = 0 & T = 0 \\ \frac{d^2 T}{dY^2} = 0 & Y = 1 & W = 1 & T = 1. \end{cases} \quad (33)$$

Pour l'écoulement de Couette, on a $dP/dZ = 0$.

On a donc comme solution : $T = Y$ et l'équation :

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{1 + NY} \frac{dW}{dY} \right) = 0$$

qui donne comme profil des vitesses les paraboles :

$$W = Y \cdot \frac{2 + NY}{2 + N} \quad (35)$$

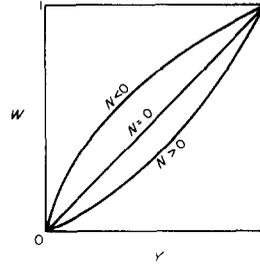


FIG. 5.

(b) Ecoulement de Poiseuille

$$\begin{cases} y = 0 & w = 0 & t = t_0 \\ y = b & w = 0 & t = t_1 \end{cases} \int_0^1 w dy = bw_m$$

Les équations sont ici :

$$Re \frac{dP}{dZ} = \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{1 + NT} \frac{dW}{dY} \right) = A = Cte \quad (33)$$

$$\frac{d^2 T}{dY^2} = 0 \quad (34)$$

$$\int_0^1 W dY = 1$$

$$Y = 1 \quad W = 1 \quad T = 1. \quad (34)$$

Ici encore $T = Y$ et l'équation (33) devient :

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{1 + NY} \frac{dW}{dY} \right) = A$$

qui donne comme profil des vitesses les cubiques :

$$W = BY + \frac{1}{2}(A + BN) Y^2 + \frac{1}{3} ANY^3 \quad (36)$$

avec

$$\begin{cases} A = \frac{36(2 + N)}{3(2 + N)^2 - 2(3 + N)(3 + 2N)} \\ B = -\frac{12(3 + 2N)}{3(2 + N)^2 - 2(3 + N)(3 + 2N)} \end{cases}$$

Pour $N \rightarrow 0$, on a bien :

$$A_0 = -12 \quad B_0 = 6$$

$$W_0 = 6Y(1 - Y)$$

$$(A Re)_0 = 2|A_0| = 24^\dagger$$

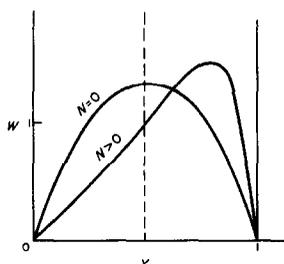


FIG. 6.

Maximum de W pour $Y_M = -\frac{B}{A}$

Inflexion de W pour $Y_I = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{B}{A}\right)$

Inflexion en $Y = 0$

si $N = -\frac{A}{B} = \frac{1 + \frac{N}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{N}{3}}$ c'est à-dire

$$\begin{cases} N = \sqrt{3} \\ Y_M = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

† Si on utilise le diamètre hydraulique $D = 2b$, pour définir A et Re , on trouve la valeur bien connue $A Re = 96$.

2.2.2 *Ecoulement de Poiseuille avec flux imposé.*
C'est le cas présenté au paragraphe 1.33, concernant l'écoulement quasi établi en convection forcée; pour alléger les notations, on a remplacé N_m et T^* par N et T :

$$\begin{cases} \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{1 + NT} \frac{dW}{dY} \right) = A \\ W = \frac{d^2 T}{dY^2} \int_0^1 WT dY = 0 \\ Y = 0 \quad \frac{dW}{dY} = \frac{dT}{dY} = 0 \\ Y = 1 \quad W = 0 \quad \frac{dT}{dY} = 1. \end{cases}$$

Mis sous forme canonique pour la résolution, ce système devient :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dW}{dY} = AY(1 + NT) \end{array} \right. \quad (37)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dT}{dY} = U \end{array} \right. \quad (38)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dU}{dY} = W \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dI}{dY} = WT \end{array} \right. \quad (40)$$

$$W(1) = 0$$

$$U(0) = 0 \quad U(1) = 1$$

$$I(0) = 0 \quad I(1) = 0.$$

A étant la constante à déterminer. Rappelons que

$$A = -\frac{A Re}{2} \quad \text{et} \quad T(1) = \frac{1}{Nu}.$$

Pour $N = 0$, on a $A = -3$ et $T(1) = \frac{1}{35}^\dagger$.

† Si on utilise le diamètre hydraulique $D = 4b$, pour définir A , Re et Nu , on trouve les valeurs bien connues

$$\begin{cases} A Re = 96 \\ Nu = \frac{140}{17} \end{cases}$$

La méthode de résolution de ce système consiste à écrire que la quantité

$$S^2 = U^2(0) + I^2(0)$$

est une fonction des 2 variables A et $T(1)$:

$$S^2 = f[A, T(1)] \equiv 0$$

dont il faudra trouver les couples de racines. On utilisera pour cela une méthode de minimisation.

Quant au calcul de S^2 , il se fera par la résolution du système différentiel ci-dessus par une méthode du type Runge-Kutta avec données initiales :

$$W(1) = 0 \quad U(1) = 1 \quad I(1) = 0 \quad T(1) \quad \text{et} \quad A.$$

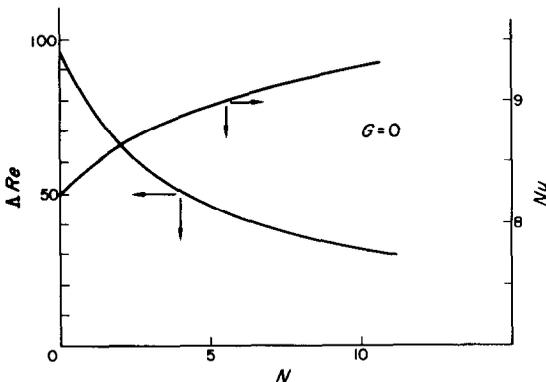


FIG. 7. Frottement et Nusselt.

La Fig. 7 indique les variations de $Nu = 4/T(1)$ et $\lambda Re = 32 |A|$ en fonction de N . On constate que le frottement est beaucoup plus influencé que l'échange de chaleur par la variation de la viscosité avec la température.

3. CONCLUSIONS

On a rappelé ou mis en évidence les nombres sans dimension qui interviennent dans la détermination des lois de frottement et d'échange de chaleur pour la convection laminaire dans les tuyaux. On a présenté des résultats numériques

montrant l'influence du paramètre de viscosité N dans des cas courants.

On peut avancer que l'extension d'une telle analyse dimensionnelle aux écoulements turbulents doit se faire sans risque; de la même manière qu'on a toujours utilisé les nombres de Reynolds et de Prandtl pour écrire les lois de l'écoulement turbulent, on pourra utiliser tout nombre nouveau déduit de la théorie laminaire à cet effet.

Enfin il est apparu que les techniques de résolution numérique par les différences finies étaient bien au point pour traiter l'approximation de la couche limite. Par suite toute hypothèse de diffusivité turbulente peut aisément être introduite pour traiter les écoulements turbulents non développés.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. G. DEISSLER, Variable fluid property effects. 6th part Survey of Rocket Heat Transfer Literature, *J. Heat Transfer*, **82C** (3), 160-162 (1960).
2. E. M. SPARROW et J. L. GREGG, Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux *Trans. ASME* **78**, 435-440 (1956).
3. PH. VERNIER, Convection naturelle dans un canal vertical de section rectangulaire chauffé uniformément. Rapport CEA n° 2197 (1962).
4. J. R. SELLARS, M. TRIBUS et J. S. KLEIN, Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat duct. The Graetz problem extended, *Trans. ASME* **78**, 441-448 (1956).
5. R. D. CESS, Heat transfer to laminar flow between parallel plates with a prescribed wall heat flux, *Appl. Sci. Res.* **8A**(5), 339-344 (1959).
6. D. M. MCELIGOT, P. M. MAGEE et G. LEPPERT, Effect of large temperature gradients on convective heat transfer: the downstream region, *ASME paper n° 64-HT-12* (1964).
7. K. T. YANG, Laminar forced convection of liquids in tubes with variable viscosity, *ASME paper n° 61-WA-166* (1961).
8. J. COSTA, Le coefficient de frottement dans un écoulement turbulent en simple phase avec transfert de chaleur, Etude bibliographique CENG—Note TT n° 187 (Février 1965).
9. G. POOTS et M. H. ROGERS, Laminar flow between parallel flat plates, with heat transfer, of water with variable physical properties, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 1515-1535 (1965).
10. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 4th Edn. McGraw-Hill, New York (1960).
11. J. R. BODOIA et J. F. OSTERLE, Finite difference analysis of plane-Poiseuille and Couette flow developments, *Appl. Sci. Res.* **10A**, 265-276 (1961).

12. J. R. BODOIA et J. F. OSTERLE, The development of free convection between heated vertical plates, *J. Heat Transfer* **84C**(1), 40-44 (1962).

13. E. M. SPARROW, R. EICHHORN et J. L. GREGG, Combined forced and free convection in a boundary layer flow, *Physics Fluids* **2**, 319-328 (1959).

14. A. ACRIVOS, On the combined effect of forced and free convection heat transfer in laminar boundary layer flows, *Chem. Engng Sci.* **21**, 343-352 (1966).

15. P. M. WORSØE-SCHMIDT et G. LEPPERT, Heat transfer and friction for laminar flow of gas in a circular tube at high heating rate, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 1281-1301 (1965).

16. T. J. HANRATTY, E. M. ROSEN et R. L. KABEL, Effect of heat transfer on flow field at low Reynolds numbers in vertical tubes, *Ind. Engng Chem.* **50**, 815-820 (1958).

17. G. F. SCHEELE et T. J. HANRATTY, Effect of natural convection on stability of flow in a vertical pipe *J. Fluid Mech.* **14**, 244-256 (1962).

18. M. B. METAIS, Superposition de la convection naturelle et de la convection forcée, *Compte Rendu des Journées Internationales de la Transmission de la chaleur*, Institut Français des Combustibles et de l'Energie, Tome I p. 393-414 (Juin 1961).

19. C. LESCOUL, J. TERRIER et PH. Vernier, Le développement de l'écoulement entre deux plaques verticales parallèles de hauteur finie chauffées uniformément, *Comptes Rendus* **257**, 1591-1594 (1963).

20. J. D. HELLUMS et S. W. CHURCHILL, Computation of natural convection by finite difference methods, 1961 *International Heat Transfer Conference*, Boulder (Colorado) Part V, Paper 118, p. 985-994.

21. R. W. HORNBECK, Laminar flow in the entrance region of a pipe, *Appl. Sci. Res.* **13A**, 224-232 (1964).

22. C. L. HWANG et L. T. FAN, Finite difference analysis of forced-convection heat transfer in entrance region of a flat rectangular duct, *Appl. Sci. Res.* **13A**, 401-422 (1964).

23. R. W. HORNBECK, W. T. ROULEAU et F. OSTERLE, Effect of radial momentum flux on flow in the entrance of a porous tube, *J. Appl. Mech.* **87E**(1), 195-197 (1965).

24. M. DOUCHEZ, Etude des transferts en mécanique des fluides monophasiques, Tome I, Masson et Cie éditeurs, Chapitre IX, p. 335 (1965).

25. J. L. PEUBE, Sur les solutions semblables des équations de la couche laminaire bidimensionnelle à masse volumique constante et propriétés physiques variables, 11th Congress of Applied Mechanics, Munich, 1964.

26. C. CLARION et F. M. ROCHE, Ecoulement laminaire d'un fluide à viscosité variable dans un tube avec transfert de chaleur à la paroi constant, *Comptes Rendus* **267A**, 360 (1968).

27. T. M. HALLMAN, Combined forced and free convection in a vertical tube, Ph.D. Thesis, Purdue University (1958).

28. D. E. ROSENBERG et J. D. HELLUMS, Flow development and heat transfer in variable-viscosity fluids, *I/EC Fundamentals* **4**, 417-422 (1965).

29. R. G. DESSLER et A. F. PRESLER, Analysis of developing laminar flow and heat transfer in a tube for a gas with

variable properties, *Proc. Third International Heat Transfer Conference*, vol. 1, p. 250 (1966).

30. C. F. KETTLEBOROUGH, Poiseuille flow with variable fluid properties, *J. Basic Engng* **89**, 666-676 (1967).

31. W. T. LAWRENCE et J. C. CHATO, Heat transfer effects on the developing laminar flow inside vertical tubes, *J. Heat Transfer* **88C**, 214-222 (1966).

32. Y. L. WANG et P. A. LONGWELL, Laminar flow in the inlet section of parallel plates, *A.I.Ch.E. Jl* **10**, 323-329 (1964).

ANNEXE

Les Solutions Analytiques Asymptotiques des Écoulements en Convection Mixte

Les équations des écoulements développés seront déduites du système des équations (19) (22) de la section 1.32. On cherche des solutions de la forme:

$$\begin{cases} W = W(Y) & V = 0 \\ T = T_m(Z^*) + T^*(Y). \end{cases}$$

En posant $G = Gr/Re$, le système devient:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{dP}{dZ^*} - G \cdot T_m(Z^*) &= \frac{d^2W}{dY^2} + G \cdot T^*(Y) = A & (A.1) \end{aligned} \right.$$

$$W \frac{\partial T}{\partial Z^*} = \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \quad (A.2)$$

$$\int_0^1 W dY = 1. \quad (A.3)$$

L'équation de continuité (19) est satisfaite identiquement. On voit que l'équation (A.1) est séparée en deux ($A = Cte$).

Nous étudierons les solutions analytiques du problème ci-dessus dans les deux cas suivants:

- échauffement d'un liquide ascendant, $G > 0$
- échauffement d'un liquide descendant, $G < 0$

$G > 0$ correspond aussi au refroidissement d'un liquide descendant

$G < 0$ au refroidissement d'un liquide ascendant.

Echauffement d'un liquide ascendant: $G > 0$.

Les conditions aux limites sont:

$$Y = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 \quad (A.4)_1$$

$$Y = 1 \quad W = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 1. \quad (A.4)_2$$

L'intégration de (A.2) de 0 à 1 donne; en utilisant (A.4)

$$\frac{d}{dZ^*} \int WT dY = 1. \quad (A.5)$$

La définition de le température de mélange est

$$T_m \int_0^1 W dY = \int_0^1 WT dY.$$

C'est-à-dire, étaut donné (A.3) et le fait que $T_m(0) = 0$

$$T_m = Z^*. \tag{A.6}$$

Alors, puisque $T = T_m + T^*$, on obtient une condition nécessaire qui remplace (A.3) et qui est

$$\int_0^1 WT^* dY = 0.$$

Le système à résoudre devient donc

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{dY^2} + GT^* = A & \text{(A.7)} \\ \frac{d^2 T^*}{dY^2} - W = 0 & \text{(A.8)} \end{cases}$$

$$\int_0^1 WT^* dY = 0 \tag{A.9}$$

$$\text{II } \frac{1}{Pr} \frac{dP}{dZ^*} = A + GZ^*. \tag{A.10}$$

Les conditions aux limites (A.4) deviennent :

$$Y = 0 \quad W^{(1)} = T^{*(1)} = 0 \tag{A.11}_1$$

$$Y = 1 \quad W = 0; \quad T^{*(1)} = 1. \tag{A.11}_2$$

L'élimination de T^* entre (A.7) et (A.8) donne

$$\frac{d^4 W}{dY^4} + G \cdot W = 0 \tag{A.12}$$

pour laquelle les conditions aux limites, déduites des (A.11) et de (A.7), sont

$$Y = 0 \quad W^{(1)} = W^{(3)} = 0 \tag{A.13}_1$$

$$Y = 1 \quad W = 0; \quad W^{(3)} = -G \tag{A.13}_2$$

Nous poserons $G = 4\lambda^4$; l'équation caractéristique de l'équation linéaire homogène du 4^e ordre (A.12) est donc

$$\tau^4 + 4\lambda^4 = 0.$$

Les solutions particulières symétriques de (A.12) sont

$$\text{ch } \lambda Y \cos \lambda Y \quad \text{et} \quad \text{sh } \lambda Y \sin \lambda Y$$

qui vérifient indetiquement les conditions (A.11)₁. Les conditions aux limites (A.11)₂ permettent d'obtenir :

$$W = \lambda \frac{\text{sh } 2\lambda \sin 2\lambda}{\text{sh } 2\lambda - \sin 2\lambda} \left[\frac{\text{ch } \lambda Y \cos \lambda Y}{\text{ch } \lambda \cos \lambda} - \frac{\text{sh } \lambda Y \sin \lambda Y}{\text{sh } \lambda \sin \lambda} \right] \tag{A.14}$$

que nous noterons :

$$W = f_1(\lambda, Y). \tag{A.15}$$

L'élimination de W entre (A.7) et (A.8) donne

$$\frac{d^4 T^*}{dY^2} + GT^* = A \tag{A.16}$$

pour laquelle, les conditions aux limites, déduites des (A.11) et de (A.8) sont

$$Y = 0 \quad T^{*(1)} = T^{*(3)} = 0 \tag{A.16}_1$$

$$Y = 1 \quad T^{*(2)} = 0; \quad T^{*(1)} = 1. \tag{A.16}_2$$

Comme pour l'intégration de (A.12), les conditions aux limites (A.16)₂ permettent d'obtenir :

$$T^* - \frac{A}{G} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\text{sh } 2\lambda \sin 2\lambda}{\text{sh } 2\lambda - \sin 2\lambda} \times \left[\frac{\text{ch } \lambda Y \cos \lambda Y}{\text{sh } \lambda \sin \lambda} + \frac{\text{sh } \lambda Y \sin \lambda Y}{\text{ch } \lambda \cos \lambda} \right] \tag{A.17}$$

que nous noterons :

$$T^* - \frac{A}{G} = f_2(\lambda, Y). \tag{A.18}$$

La détermination de la constante, encore inconnue, A se fait à l'aide de (A.9) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 WT^* dY &= \int_0^1 f_1 \left(f_2 + \frac{A}{G} \right) dY \\ &= \int_0^1 f_1 f_2 dY + \frac{A}{G} \int_0^1 f_1 dY = 0. \end{aligned}$$

Mais comme $\int_0^1 f_1 dY = 1$, on obtient

$$A = -G \int_0^1 f_1 f_2 dY \tag{A.19}$$

ce qui donne pour la température

$$T^* = f_2(\lambda, Y) - \int_0^1 f_1(\lambda, Y) f_2(\lambda, Y) dY \quad (A.20)$$

Le calcul de la fonction de λ [3] p. 31)

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^1 f_1(\lambda, Y) f_2(\lambda, Y) dY$$

donne

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sh } 2\lambda \sin 2\lambda}{\text{sh } 2\lambda - \sin 2\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{2}{\text{sh } 2\lambda \sin 2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} \right. \\ & \times [(\text{tg } \lambda \text{ th } \lambda - \text{cotg } \lambda \text{ coth } \lambda)(\text{coth } 2\lambda - \text{cotg } 2\lambda) \\ & \left. + 2(\text{coth } 2\lambda + \text{cotg } 2\lambda)] \right\} \quad (A.21) \end{aligned}$$

Nombre de Nusselt

Par définition

$$\begin{aligned} Nu = \frac{hb}{k} = \frac{\varphi b}{k} \frac{1}{T_p - T_m} = \frac{1}{T^*(\lambda, 1)} \\ Nu^{-1} = f_2(\lambda, 1) - \Phi_1(\lambda). \quad (A.22) \end{aligned}$$

La courbe pleine de la Fig. 2 représente la variation de $4 Nu(\lambda)$.

Valeurs asymptotiques

$$\begin{aligned} \lambda \rightarrow 0 \quad Nu \rightarrow \frac{35}{17} \quad \text{car } \Phi_1 \rightarrow \frac{3}{4\lambda^4} \\ \lambda \rightarrow \infty \quad Nu \rightarrow \frac{4}{3}\lambda \quad \text{car } \Phi_1 \rightarrow \frac{1}{4\lambda} \end{aligned}$$

On voit que, dès que $\lambda > 1,8$, on a pratiquement:

$$Nu_{\infty} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{Gr}{Re} \right)^{0,25} \quad (A.23)$$

Nombre de Frottement

D'après (30), on a:

$$A \cdot Re = 2 \left| \left(\frac{dw}{dy} \right)_{Y=1} \right| \quad (A.24)$$

$A \cdot Re = 2 |f'_1(\lambda, 1)|$ ce qui donne:

$$A \cdot Re = 4\lambda^2 \frac{\text{sh } 2\lambda + \sin 2\lambda}{\text{sh } 2\lambda - \sin 2\lambda}$$

$$\lambda \rightarrow 0 \quad A \cdot Re \rightarrow 6 \left[1 + \frac{4}{3}\lambda^4 + O(\lambda^8) \right]$$

$$\lambda \rightarrow \infty \quad A \cdot Re \rightarrow 4\lambda^2.$$

A propos du frottement, on peut indiquer encore une relation intéressante liée au profil des températures. En intégrant (A.7) de 0 à 1:

$$\left(\frac{dw}{dY} \right)_{Y=1} + G \int_0^1 T^* dY = A$$

c'est à dire, puisque $w'(1) < 0$ et que $T^* = f_2 + \frac{A}{G}$

$$A \cdot Re = 2G \int_0^1 f_2(\lambda, Y) dY \quad (A.25)$$

Refroidissement d'un liquide ascendant: $G < 0$

Par définition, le flux de chaleur à la paroi φ est négatif ($\varphi < 0$) on montre aisément que toutes les équations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. Les conditions aux limites également. L'intégration des équations (A.12) et (A.16) change car on écrit, en posant:

$$G = -\lambda^4$$

$$\begin{cases} W^{(4)} - \lambda^4 W = 0 & (A.26) \\ T^{*(4)} - \lambda^4 T^* = A & (A.27) \end{cases}$$

dont les solutions sont:

$$W = \lambda \frac{1}{\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda} \left(\frac{\cos \lambda y}{\cos \lambda} - \frac{\text{ch } \lambda y}{\text{ch } \lambda} \right) \quad (A.28)$$

$$T^* - \frac{A}{G} = -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda} \left(\frac{\cos \lambda y}{\cos \lambda} + \frac{\text{ch } \lambda y}{\text{ch } \lambda} \right) \quad (A.29)$$

$$W = g_1(\lambda, Y) \quad T^* - \frac{A}{G} = g_2(\lambda, Y).$$

Les formules donnant A et T^* sont les mêmes que (A.19) et (A.20). Dans le cas présent:

$$\Phi_2(\lambda) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda} + \frac{2\text{tg } \lambda \text{ th } \lambda}{(\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda)^2} \right) \quad (A.30)$$

Nombre de Nusselt

$$Nu^{-1} = g_2(\lambda, 1) - \Phi_2(\lambda) \quad (A.31)$$

c'est à dire:

$$Nu^{-1} = +\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda(\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda)} + \frac{\text{tg } \lambda \text{ th } \lambda}{(\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda)^2}$$

Nombre de Frottement

$$A \cdot Re = 2 |g'_1(\lambda, 1)| = 2\lambda^2 \frac{\text{tg } \lambda + \text{th } \lambda}{\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda} \quad (A.32)$$

Valeurs asymptotiques

Pour $\lambda \rightarrow 0$, on a:

$$Nu^{-1} \simeq \frac{1}{33} \left[1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + O(\lambda^4) \right] \quad (A.33)$$

$$A \cdot Re \simeq 6 \left[1 - \frac{1}{33}\lambda^4 + O(\lambda^8) \right] \quad (A.34)$$

Pour $\lambda \rightarrow \infty$, il n'y a pas de formule puisque les fonctions en cause ne sont pas définies pour les valeurs de $\lambda = \lambda_c$ annulant le dénominateur $\text{tg } \lambda - \text{th } \lambda = 0$. Lorsque λ croît à partir de 0.

$$(1) \lambda = \pi/2 \Rightarrow W(Y) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} Y$$

$$W'(1) = -\left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

$$W(0) = \frac{\pi}{2}$$

un point d'inflexion apparaît pour $Y = 1$

$$(2) \lambda = \lambda_1 \left(\text{un peu inférieur à } \frac{3\pi}{4} \right) \text{ solution de l'équation}$$

$$\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda = 0$$

$$\Rightarrow W'(1) = 0$$

Le gradient de vitesse et le frottement sont nuls à la paroi

(3) pour $\lambda_1 < \lambda < \lambda_c$, il y a une zone de vitesses négatives le long de la paroi.

Par exemple pour $\lambda = \pi$:

$$W(Y) = \frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} (\operatorname{ch} \pi \cos \pi y + \operatorname{ch} \pi y)$$

$$W(0) = \frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} (\operatorname{ch} \pi + 1)$$

$$W'(1) = \pi^2.$$

Le valeur $\lambda_c \simeq 5\pi/4$ est une valeur critique.

ONE-PHASE FLOW PROBLEM WITH VARIABLE PHYSICAL PROPERTIES IN A HEATED VERTICAL PRISMATIC CHANNEL

Abstract—Dimensional analysis is made from the most general conservation equations written with boundary layer approximation. It is shown, with given wall heat-flux as boundary condition, that just as the fluid expansion coefficient B leads to the Grashof number governing free convection effects, viscosity temperature coefficient, ... leads to a nondimensional number N governing variable viscosity effects.

The concept of pseudo-developed flow is defined and numerical results for common types of laminar flows are given. The dimensional analysis is applicable without modification to experimental study of turbulent flows.

EINPHASENSTRÖMUNG MIT VERÄNDERLICHEN STOFFEIGENSCHAFTEN IN EINEM BEHEIZTEN VERTIKALEN KANAL MIT PRISMATISCHEM QUERSCHNITT

Zusammenfassung—Es wird eine Dimensionsanalyse gemacht für die allgemeinsten Erhaltungssätze, angesetzt mit der Grenzschichtnäherung. Mit gegebenem Wärmestrom an der Wand als Randbedingung wird gezeigt, dass genauso, wie der Koeffizient B der Flüssigkeitsexpansion zur Grashof-Zahl führt, die die Effekte der freien Konvektion erfasst, der Koeffizient der Viskositätsänderung, infolge Temperaturänderungen zu einer dimensionslosen Zahl N führt, die verschiedene Viskositätseffekte erfasst.

Das Konzept der pseudo-ausgebildeten Strömung wird dargelegt; es werden numerische Ergebnisse für gemeinsame Typen laminarer Strömungen angegeben. Die Dimensionsanalyse ist ohne Modifizierung auf Versuche mit turbulenter Strömung anwendbar.

ЗАДАЧА ОБ ОДНОФАЗНОМ ТЕЧЕНИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ В НАГРЕТОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Аннотация—Анализируются общие уравнения сохранения, записанные в приближении пограничного слоя. Показано, при заданном тепловом потоке на стенке, что подобно тому как коэффициент объемного расширения жидкости приведет к числу Грасгофа, определяющему влияние свободной конвекции, температурный коэффициент вязкости приводит к безразмерному числу N , определяющему влияние изменения вязкости. Дается определение псевдоразвитого течения и приводятся результаты для ряда ламинарных течений. Анализ размерностей может быть без изменений принят при экспериментальном изучении турбулентных течений.